EMD

Durée 2h

Tout document interdit

**Exercice 1 (4) (antinomie de Russel)**

Montrer que l’énoncé suivant est faux :

*« Il existe y tel que x appartient à y ssi x n’appartient pas à lui-même ».*

(Ceci revient à montrer que l’ensemble des ensembles qui n’appartiennent pas à eux-même n’existe pas).

**Exercice 2 (2)**

Montrer la proposition suivante : |=∀*x*P(*x*) → P(*t1*)∧ P(*t2*)∧…. ∧P(*tn*)

**Exercice 3 (3-3)**

Les propositions suivantes sont-elles valides ? Justifier.

1. Si|= ∀*x*α alors |= α
2. Si ∀*x*α non satisfiable alors α non satisfiable

**Exercice 4 (1, 1) – (3-3)**

**Question 1.** Montrer que les deux formules α et β sont satisfiables :

α : ∃*x*(S(*x*) ∨ P(*x*))

β : (∃*x*S(*x*)) ∨ ∃*x*P(*x*))

**Question 2.** La proposition |= α → β est-elle valide ? Si vous pensez que oui, le montrer :

1. à l’aide de la résolution ;
2. à l’aide d’un arbre sémantique.

EMD

Correction

**Exercice 1 (4) (antinomie de Russel)**

Montrer que l’énoncé suivant est faux :

*« Il existe y tel que x appartient à y ssi x n’appartient pas à lui-même ».*

β : ∃*y*∀*x*(A(*x*,*y*) ↔ ¬A(*x*,*x*))  **0.5 point**

Montrer que l’énoncé est faux revient à montrer que β est non satisfiable.

β est non satisfiable ssi βS est non satisfiable ssi l’ensemble S des clauses issu de βS est non satisfiable.

βS : ∀*x*(A(*x*,*a*) ↔ ¬A(*x*,*x*))  **≡** ∀*x*((¬A(*x*,*a*) ∨ ¬A(*x*,*x*))∧ (A(*x*,*x*) ∨ A(*x*,*a*))) **0.5 point**

Renommer les variables **0.5 point**

L’ensemble des clauses après avoir renommé les variables est :

S : {¬A(*x*,*a*) ∨ ¬A(*x*,*x*), A(*z*,*z*) ∨ A(*z*,*a*)} **0.5 point**

Montrer que S est non satisfiable

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Par la résolution** | 1. **Arbre sémantique** |
| C0 : ¬A(*x*,*a*) ∨ ¬A(*x*,*x*)  C1 : A(*z*,*z*) ∨ A(*z*,*a*)  C2 : ¬A(*a*,*a*) facteur de C1 [*a*/*x*] **1 point**  C3 : A(*a*,*a*) facteur de C2  [*a*/*z*]  C4 : Res (C2, C3)  S|⎯ ⇒ S inconsistant  ⇒ non satisfiable (propriété de consistance) **1 point** | A(*a,a*) ⎤A(*a,a*)  **1point**  C2  C1  Il existe un arbre sémantique clos pour S. S est donc non satisfiable.  **1point** |

1. **En supposant l’existence d’un modèle pour β :**

On suppose β satisfiable. Il existerait dans ce cas, une interprétation *I* telle que : *I*|=β **0.5 point**

*I*|=∃*y*∀*x*(A(*x*,*y*) ↔ ¬A(*x*,*x*)) ssi :

il existe au moins un élément *d* ∈ *DI* , soit *dy* l’un de ces éléments, tel que pour tout *d’*∈*DI*

*I*|=A(*x*,*y*)↔¬A(*x*,*x*))*v*(*y=d, x=d’)* **1 point**

Nous avons par conséquent :

Pour tout *d* *I*(A)(*d*,*dy* ) ssi non A(*d*,*d*)) pour un certain *dy*∈ *DI* **0.5 point**

Pour *d* = *dy I*(A)( *dy*,*dy* ) ssi non A(*dy*, *dy*)) Contradiction **0.5 point**

**Conclusion :** β est non satisfiable ⇒ |= ¬β **0.5 point**

**Exercice 2 (2)**

Montrer la proposition suivante : |=∀*x*P(*x*) → P(*t1*)∧ P(*t2*)∧…. ∧P(*tn*)

Récurrence sur *n*

*n =* 1

|=∀*x*P(*x*) → P(*t1*) est une instance de la formule |=∀*x*α → α(*t1*) **0.5 point**

*n =* 2

|=∀*x*P(*x*) → P(*t1*) ∧ P(*t2*) **0.5 point**

|=∀*x*P(*x*) → P(*t1*) et |=∀*x*P(*x*) → P(*t1*)

On en déduit |=(∀*x*P(*x*) → P(*t1*)) ∧ (∀*x*P(*x*) → P(*t1*))

(∀*x*P(*x*) → P(*t1*)) ∧ (∀*x*P(*x*) → P(*t1*)) ≡ ∀*x*P(*x*) → P(*t1*) ∧ P(*t2*) (la 1ière formule est obtenue par distribution de → à partir de la seconde :

On déduit : |=∀*x*P(*x*) → P(*t1*) ∧ P(*t2*)

**Hypothèse de récurrence :**

On suppose la proposition valide jusqu’à l’ordre *n*

A l’ordre *n+1*  **1 point**

|=∀*x*P(*x*) → P(*tn+1*) (cas où *n*=1)

|=∀*x*P(*x*) → P(*t1*)∧ P(*t2*)∧…. ∧P(*tn*) (hypothèse de récurrence)

|=∀*x*P(*x*) → P(*t1*)∧ P(*t2*)∧…. ∧P(*tn*) et |=∀*x*P(*x*) → P(*tn+1*)

⇒ |=**(**∀*x*P(*x*) → P(*t1*)∧ P(*t2*) ∧…. ∧P(*tn*) **)** **∧** **(**∀*x*P(*x*) → P(*tn+1*)**)**

On met en facteur∀*x*P(*x*) → (cas où *n*  =2)

|=∀*x*P(*x*) → P(*t1*)∧ P(*t2*) ∧…. ∧P(*tn*)**∧** P(*t1*)

**Exercice 3  (3-3)**

* 1. Si|= ∀*x*α alors |= α

Raisonnement par l’absurde :

On suppose : |= ∀*x*α **(1)** et |≠ α **(2)**

1. |≠ α ssi ¬α satisfiable i-e, il existe une interprétation, appelons la *J,* et une valuation *v* (soit *v0*) telles que *J*|=¬α*v0*

Posons *v0*(*x*) = *d0*

**(1’)** *J*|=¬α*v0*(*x*=*d0*)

1. |= ∀*x*α ssi pour toute interprétation *I* et pour toute valuation *v*, *I*|= α*v*(*x*=*d*) pour tout *d* ∈ *DI*. Ceci est particulièrement vrai pour l’interprétation *J* et pour la valuation *v0*. On en déduit : *J*|=α*v*(*x*=*d0*) contradiction avec **(1’).**
   1. Si ∀*x*α non satisfiable alors α non satisfiable.

Cette proposition n’est pas valide. Contre-exemple :

La formule ∀*x*P(*x*) ∧ ¬P(*y*) est non satisfiable mais P(*x*) ∧ ¬P(*y*) est satisfiable.

**Exercice 4 (1, 1) – (3-3)**

**Question 1.** Montrer que les deux formules α et β sont satisfiables :

α : ∃*x*(S(*x*) ∨ P(*x*))

β : (∃*x*S(*x*)) ∨ ∃*x*P(*x*))

Il s’agit de trouver une interpretation *I*  et une interprétation *J* telles que :

*I* |= α

*J*|= β

*I* |= α ssi *I*|= (S(*x*) ∨ P(*x*))*v*(*x*=*d*) pour au moins un élément *d* ∈*DI* – soit *d0* l’un de ceséléments

*I*(S)(*d0*) ou *I*(P)(*d0*)  **1 point**

Exemple de modèle : *DI* = N, I(P) = « pair »

*J* |= β ssi *J*|=S(*x*)*v*(*x*=*d*) pour au moins un élément *d* ∈*DI* (soit *d0* l’un de ceséléments)

**ou** *J*|=P(*x*))*v*(*x*=*d*) pour au moins un élément *d* ∈*DI* (soit *d1* l’un de ceséléments)

*I*(S)(*d0*) ou *I*(P)(*d1*) **1 point**

Exemple de modèle : *DI* = N, I(P) = « pair »

**Question 2.** La proposition |= α → β est-elle valide ? Si vous pensez que oui, le montrer :

1. à l’aide de la résolution ;
2. à l’aide d’un arbre sémantique.

La proposition |= α → β est valide ssi α ∧¬ β est non satisfiable Ssi l’ensemble S des clauses issu de (α ∧¬ β)PS est non satisfiable **0.5 point**

On renomme les variables :

(α ∧¬ β): ∃*x*(S(*x*) ∨ P(*x*))∧ ∀*u* ¬S(*u*) ∧∀*v* ¬ P(*v*) **0.5 point**

(α ∧¬ β)P: ∃*x*∀*u*∀*v* **(** (S(*x*) ∨ P(*x*))∧ ¬S(*u*) ∧¬ P(*v*)**)**

(α ∧¬ β)PS: ∀*u*∀*v* **(**(S(*a*) ∨ P(*a*))∧ ¬S(*u*) ∧¬ P(*v*)**) 0.5 point**

**S : {**S(*a*) ∨ P(*a*)**,** ¬S(*u*), ¬ P(*v*)**} 0.5 point**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Par la résolution 2 points** | 1. **Arbre sémantique 2 points** |
| C0 : S(*a*) ∨ P(*a*)  C1 : ¬S(*u*)  C2 : ¬ P(*v*)  C3 : ¬S(*a*) C1[*a/u*]  C4 : ¬ P(*a*) C2[*a/v*]  C5 : P(*a*) Res(C0, C3)  C6 : Res (C4, C5) **1 point**  S|⎯ ⇒ S inconsistant  ⇒ non satisfiable (propriété de consistance) **1 point** | S(*a*) ⎤S(*a*)  P(*a*) ⎤P(*a*)  C1  C2  C0  Il existe un arbre sémantique clos pour S. S est donc non satisfiable. **1 point** |